



دوشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۰۴

دفترچه پاسخ

مثلثات + فصل ۲ آمار و احتمال +
فصل ۷ ریاضی دهم (صفحه ۱۴۱ تا ۱۵۱) +
فصل ۱ (درس سوم) و ۲ هندسه یازدهم

دوبینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی ریاضیات

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	مهدی عزیزی کیوان دارابی	فرشاد حسن زاده ارسلان حسونند - سجاد احمدی فؤاد خیرآبادی

مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	-	الگو و دنباله + توان های گویا و عبارات های جبری
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم

۵۵ روز جمع بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دانش آموزان عزیز ماز ❤️

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشید.

مثلثات

در هر سه کتاب ریاضی ۱، حسابان ۱ و حسابان ۲ یک فصل مستقل به نام مثلثات داریم. سوالات کنکور سراسری عموماً به سه بخش اتحادهای مثلثاتی، نمودار مثلثاتی و معادلات مثلثاتی تقسیم‌بندی می‌شوند. دقت داشته باشید اتحادهای مثلثاتی در موضوعاتی مانند حد و مشتق نیز کاربرد دارند. بنابراین تسلط به این اتحادها بسیار ضروری به نظر می‌رسد. سعی کنید از حفظ کردن اتحادهای فرعی و کمیاب اجتناب کنید تا ذهنتون خیلی درگیر فرمول‌های کم کاربرد نشه.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

مثلثات یک مفهوم جدید و برای یادگیری نیاز به مطالعه قبلی نیست اما تو بعضی جاها به اشکال هندسی و به معادله خط و یا حتی به حل معادله (سوالات معادلات مثلثاتی دوازدهم) و انتقال نمودار برای رسم توابع مثلثاتی و ... ربط پیدا می‌کنه، پس مرور مفاهیم پایه ریاضیات میتونه تو یادگیری هر چه بهترتون تاثیرگذار باشه.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

این بخش تقریباً تو همه بخش‌های دیگه استفاده میشه و قابل ترکیب و تو کنکور هم اتفاقاً سوالات ترکیبی داریم (ترکیب با تابع، حد و مشتق و کاربرد مشتق مهمترین این ترکیبات هستن). البته تو فیزیک نیز به شدت کاربرد داره.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	نوبت اول ۱۴۰۲	نوبت دوم ۱۴۰۲	نوبت اول ۱۴۰۳	نوبت دوم ۱۴۰۳
تعداد سوال	۳	۳	۳	۴	۴	۴
مباحث مطرح شده در سوال	اتحادهای مثلثاتی (دو سوال) معادله مثلثاتی	اتحادهای مثلثاتی نمودار مثلثاتی معادله مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل نمودار مثلثاتی معادله مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی مجموع تفاضل اتحادهای مثلثاتی معادله مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل اتحادهای مثلثاتی معادله مثلثاتی	مثلثات و هندسه دهم اتحادهای مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل معادله مثلثاتی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنیم که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ❁

حسین شفیعی‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



۱- اگر $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 7$ ، حاصل $2 \cot 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $-\frac{7}{12}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 7 \Rightarrow \sin x + \cos x = 7 \sin x - 7 \cos x \Rightarrow 8 \cos x = 6 \sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{8}{6} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}$$

$$2 \cot 2x = \cot x - \tan x = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{7}{12}$$

بنابراین:

اینارو یادت بمونه سریعتر کارت راه میفته...

$$\cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x} \quad \cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

گروه آموزشی ماز

۲- حاصل عبارت $\frac{4 \sin 107^\circ - 5 \cos 163^\circ}{\cos 737^\circ + 2 \sin(-253^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

$$\frac{4 \sin 107^\circ - 5 \cos 163^\circ}{\cos 737^\circ + 2 \sin(-253^\circ)} = \frac{4 \sin(90^\circ + 17^\circ) - 5 \cos(180^\circ - 17^\circ)}{\cos(720^\circ + 17^\circ) - 2 \sin(270^\circ - 17^\circ)}$$

$$= \frac{4 \cos 17^\circ - (-5 \cos 17^\circ)}{\cos 17^\circ - 2(-\cos 17^\circ)} = \frac{9 \cos 17^\circ}{3 \cos 17^\circ} = 3$$

تبدیلات نسبت‌های مثلثاتی $\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha$ چگونه انجام می‌شه؟

(۱) برای مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی باید بدانیم که زاویه $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه اول، زاویه $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه دوم، زاویه $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه سوم و زاویه

$(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

(۲) با توجه به حضور مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ داخل کمان، ماهیت نسبت‌های مثلثاتی تغییر می‌کند:

$$\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\tan \alpha$$

$$\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\tan \alpha$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

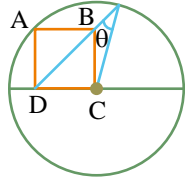
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

گروه آموزشی ماز



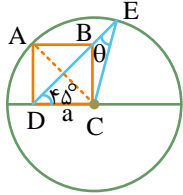
۳- در شکل مقابل، ABCD مربع است. زاویه θ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$
(۲) $\frac{\pi}{6}$
(۳) $\frac{\pi}{4}$
(۴) $\frac{\pi}{3}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

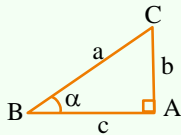
پاسخ: گزینه ۲

از آن جایی که BD قطر مربع است، پس زوایای 45° ایجاد می‌کند. ضمناً AC شعاع دایره و قطر مربع به ضلع a است، پس $AC = a\sqrt{2}$ ، یعنی شعاع دایره $a\sqrt{2}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت CE هم که شعاع دایره است برابر $a\sqrt{2}$ می‌باشد. حالا طبق قانون سینوس‌ها داریم:



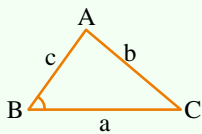
$$\frac{CD}{\sin \theta} = \frac{CE}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\sin \theta} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

نسبت‌های مثلثاتی در یک قاب



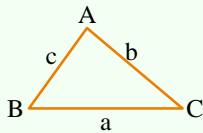
$$\sin \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \cot \alpha = \frac{a}{b}$$



$$S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$$

مساحت مثلث به کمک سینوس



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

و این سینوس پرماجر!

گروه آموزشی ماز

۴- اگر $A = \sin \frac{\pi}{12}$ ، مقدار A^2 کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) $2 + \sqrt{2}$
(۳) $2 - \sqrt{3}$
(۴) $2 + \sqrt{3}$

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

$\sin \frac{\pi}{12}$ یعنی $\sin 15^\circ$ را می‌خواهیم. با استفاده از فرمول طلایی داریم:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=15^\circ} 1 - \cos 30^\circ = 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4A^2 = 2 - \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$ ، حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۳
(۴) $\frac{1}{3}$



(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

اگر فرض کنیم $\frac{\alpha}{2} = x$ ، پس $\tan x = 3$ ، $\alpha = 2x$ ، بنابراین با استفاده از روابط $\sin 2x$ و $\cos 2x$ داریم:

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} + \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

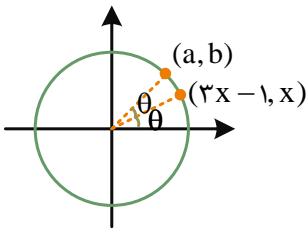
$$= \cot x + \cot x = 2 \cot x = 2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

سینوس و کسینوس دو برابر کمان

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

گروه آموزشی ماز

۶- با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $b-a$ کدام است؟



(۲) $-\frac{17}{25}$

(۱) $\frac{17}{25}$

(۴) $-\frac{19}{25}$

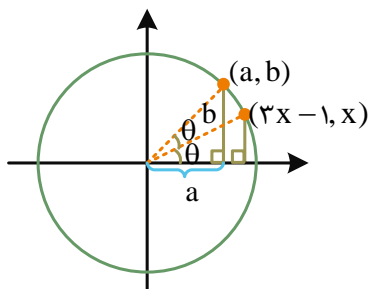
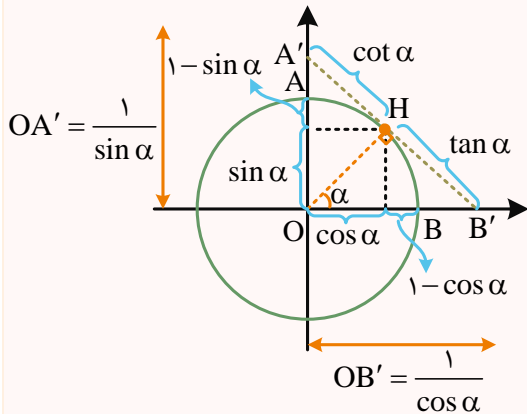
(۳) $\frac{19}{25}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

دایره مثلثاتی و حاشیه هایش!!

اگر $A'B'$ خطی مماس بر دایره مثلثاتی (عمود بر شعاع دایره در H) باشد:



$$x^2 + (3x-1)^2 = 1 \Rightarrow 10x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(5x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ قق} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

بنابراین:

طبق شکل $a = \cos 2\theta$ و $b = \sin 2\theta$ ، پس:

$$\begin{cases} \sin \theta = x = \frac{3}{5} \\ \cos \theta = 3x - 1 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \\ a = \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{17}{25}$$

گروه آموزشی ماز



۷- اگر $0 < 2x < \pi$ و $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$-\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 1 \xrightarrow{+\cos^2 x} 2 \tan^2 x - \tan x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

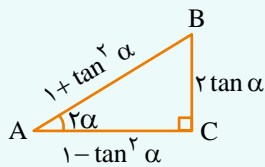
$$\Rightarrow (\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = -1 \end{cases}$$

از آن جایی که $0 < 2x < \pi$ ، پس $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\tan x > 0$ است یعنی $\tan x = 2$ ، بنابراین:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(2)}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

این مثلث رو خوب بلد باش!

مثلث رو فقط برای این کشیدیم تا رابطه‌های زیر رو بهتر بتونی یاد بگیری.



- $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

گروه آموزشی ماز



۸- حاصل عبارت $\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

در صورت کسر به جای $\sqrt{3}$ می‌نویسیم $\cot 30^\circ$:

$$\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 30^\circ \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\sin(30^\circ + 20^\circ)}{\sin 30^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ \cos 40^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

بسط نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\alpha \pm \beta$:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{5}$ ، حاصل $\sin(\frac{3\pi}{4} - 4x)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{86}$

(۳) $\frac{1}{86}$

(۲) $-\frac{1}{92}$

(۱) $\frac{1}{92}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{5} \Rightarrow (\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x})(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1) = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{5}$$

ناحیه سوم

$$\sin(\frac{3\pi}{4} - 4x) = -\cos 4x = -\cos 2(2x)$$

بنابراین:

اگر $2x = \alpha$ طبق رابطه $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ داریم:

$$\text{حاصل عبارت} = -\cos 2\alpha = -(2\cos^2 \alpha - 1) = -(2(\frac{1}{5})^2 - 1) = \frac{23}{25} = \frac{1}{92}$$

روابط 2α در یک قاب!

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

به عنوان مثال

$$\sin(\alpha) = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$\sin(6\alpha) = 2 \sin(3\alpha) \cos(3\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$



به عنوان مثال

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(20^\circ) = \cos^2(10^\circ) - \sin^2(10^\circ) = 2\cos^2(10^\circ) - 1 = 1 - 2\sin^2(10^\circ)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

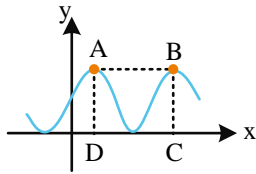
در حالت کلی تر $\Rightarrow \tan 20^\circ = \frac{2 \tan 10^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ}$

به عنوان مثال

$$\tan(110^\circ) = \frac{2 \tan(55^\circ)}{1 - \tan^2(55^\circ)}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = b + \frac{a}{4} \sin 4\pi x$ است. اگر در مستطیل ABCD، $CD = 2AD$ باشد، کدام است؟



- (۱) ۰/۲۵
- (۲) ۰/۵
- (۳) ۰/۱۲۵
- (۴) ۰/۱۵

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

فاصله C تا D همان T یعنی دوره تناوب تابع f است. ضمناً طبق نمودار min مقدار تابع f برابر صفر است. قرار است اندازه CD دو برابر AD باشد، از آنجایی که نمودار داده شده محور yها را اکیداً صعودی قطع کرده، پس $a > 0$ می باشد:

$$f(x) = b + \frac{a}{4} \sin 4\pi x \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{1}{2} \\ \min = 0 \Rightarrow -\left|\frac{a}{4}\right| + b = 0 \xrightarrow{a>0} -\frac{a}{4} + b = 0 \Rightarrow a = 4b \\ \max = \left|\frac{a}{4}\right| + b \xrightarrow{a=4b} b + b = 2b \end{cases}$$

از آنجایی که $CD = 2AD$ ، پس:

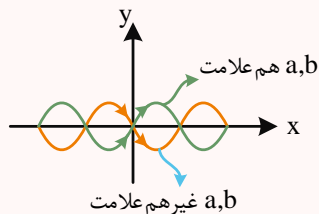
$$CD = 2AD \Rightarrow \frac{1}{2} = 2(2b) \Rightarrow b = \frac{1}{8}$$

نمودار $y = a \sin bx + c$

(۱) دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

(۲) اگر a و b هم علامت باشند ($ab > 0$) نمودار محور yها را با شیب مثبت (صعودی) قطع می کند.

(۳) اگر a و b مختلف علامت باشند ($ab < 0$) نمودار محور yها را با شیب منفی (نزولی) قطع می کند.



$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \quad (۴)$$

گروه آموزشی ماز

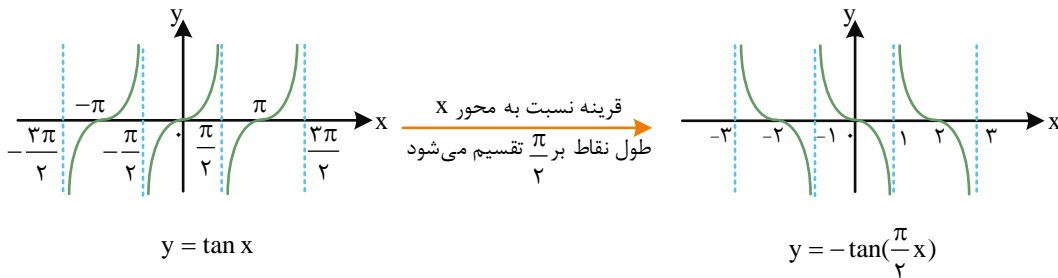


۱۱- در مورد تابع $f(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ کدام گزینه نادرست است؟

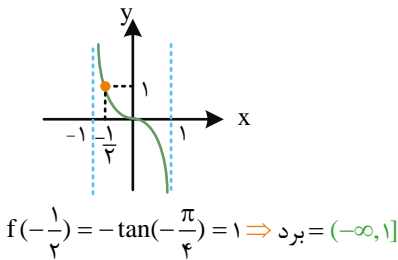
- (۱) در دامنه این تابع هیچ عدد صحیح فردی حضور ندارد.
- (۲) نمودار تابع، در نقاطی با طول صحیح و زوج، به محور xها برخورد می کند.
- (۳) برد این تابع در بازه $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ به صورت $(-\infty, 1]$ می باشد.
- (۴) در بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴



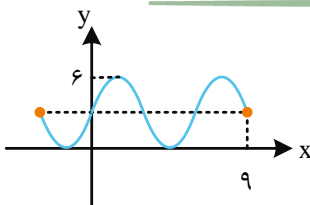
طبق نمودار هیچ عدد فردی در دامنه تابع حضور ندارد، ضمناً در نقاطی با طول زوج نمودار تابع با محور xها برخورد می کند. همچنین در بازه $(-1, 1)$ اکیداً نزولی است و در بازه $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ برد آن $(-\infty, 1]$ است:



گروه آموزشی ماز

۱۲- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = c + a \sin b\pi x \cos b\pi x \cos 2b\pi x$ می باشد. مقدار abc کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) -۴
- (۳) ۳
- (۴) -۳

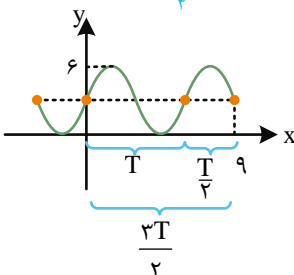


(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می کنیم:

$$f(x) = c + a \underbrace{\sin b\pi x \cos b\pi x \cos 2b\pi x}_{\frac{1}{4} \sin 4b\pi x} \Rightarrow f(x) = c + \frac{a}{4} \sin 4b\pi x$$



$$\begin{cases} \frac{3}{2}T = 9 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|4b\pi|} = 6 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{12} \\ \max = 6 \Rightarrow \frac{|a|}{4} + c = 6 \\ \min = 0 \Rightarrow -\frac{|a|}{4} + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = \pm 12 \end{cases}$$

از آنجایی که نمودار f محور yها را صعودی قطع کرده پس a و b هم علامت هستند، پس: $ab = 1$ و در نتیجه $abc = 3$ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز



۱۳- مجموع کوچکترین و بزرگترین جواب معادله $\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ آزمون وی ای پی

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

می دانیم $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ داریم، پس:

از آنجایی که مجموع زوایای $x + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} - x$ برابر $\frac{\pi}{2}$ می شود، متمم هستند، پس:

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{معادله}} \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

زوایای متمم

اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ دو زاویه β و α را متمم می گوئیم و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{پس}} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{4\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{4\pi}{4} \\ \tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{4\pi}{4} \end{array} \right.$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

اگر $\sin x + \cos x = t$ داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = t^2 \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\underbrace{\sin x + \cos x}_t + \underbrace{\sin 2x}_{t^2 - 1} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow t^2 + t = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین:

دقت کنید که مجموع $\sin x$ و $\cos x$ نمی تواند $1 - \sqrt{2}$ (تقریباً -0.7) باشد، چون حداقل هر کدام از آن ها -1 است.

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{به توان ۲ برسانیم: راه اول} \\ \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

نکته ای طلایی

$$-\sqrt{2} \leq \sin x \pm \cos x \leq \sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

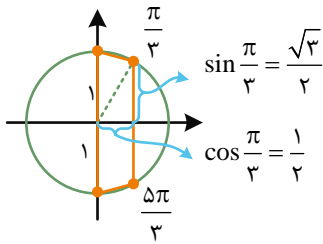
۱۵- انتهای کمان جواب های معادله مثلثاتی $1 + \cos 2x = \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی، رئوس یک چندضلعی هستند. مساحت چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



فرمول طلایی
 $1 + \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x = \cos x \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

مساحت = $\frac{(2 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3}$

گروه آموزشی ماز

۱۶- یک عدد به تصادف از مجموعه $\{12, 13, \dots, 94\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد مضرب ۲ باشد یا مضرب ۳ نباشد، چقدر است؟

$\frac{70}{83}$ (۴)

$\frac{69}{83}$ (۳)

$\frac{68}{83}$ (۲)

$\frac{67}{83}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۷)

پاسخ: گزینه ۳

$P(A \cup B') = 1 - P(A \cup B)' = 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(B - A) = 1 - (P(B) - P(A \cap B))$

$P(A \cup B') = 1 - \frac{\left(\binom{94}{3} - \binom{11}{3}\right) - \left(\binom{94}{6} - \binom{11}{6}\right)}{94 - 12 + 1}$

$P(A \cup B') = 1 - \frac{31 - 3 - (15 - 1)}{83} = 1 - \frac{14}{83} = \frac{69}{83}$

استراتژی پیدا کردن مضارب یک عدد

(۱) می‌خواهیم مضارب عدد a را در بین اعداد مجموعه $A = \{m, m+1, \dots, n\}$ بیابیم:

$m \leq ak \leq n \Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \quad (k \in \mathbb{Z})$

مثال

$\{21, 22, \dots, 37, 38\}$

تعداد مضارب عدد ۳ در مجموعه مقابل کدام است؟

$21 \leq 3k \leq 38 \Rightarrow 7 \leq k \leq \frac{38}{3} \Rightarrow k = 7, 8, 9, 10, 11, 12$

۶ عدد مضرب ۳ در مجموعه بالا وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۷- یک خانواده ۳ فرزند دارد که نام یکی از آن‌ها علی است. احتمال آن که علی حداقل یک برادر داشته باشد، چقدر است؟

$\frac{6}{7}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

فضای نمونه، جنسیت دو فرزند دیگر غیر از علی است. احتمال آن که لااقل یکی از دو نفر پسر باشد را می‌توانیم از متمم پیدا کنیم.

$P(\text{پسر}) = 1 - P(\text{اصلاً پسر نباشد}) = 1 - \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{2}} = \frac{3}{4}$

گروه آموزشی ماز



۱۸- اگر $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ یک فضای نمونه غیرهم‌شانس باشد به طوری که $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ ، اگر $P(A) = \frac{3}{10}$ و $P(B) = \frac{4}{5}$ ، آن گاه $P(A'|B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A'|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A \cup B = S \Rightarrow P(A \cup B) = P(S) \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(S)$$

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{5} - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A'|B) = 1 - \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{8}$$

اما:

بنابراین:

در نتیجه:

فضای نمونه غیرهم‌شانس

سؤالات فضای نمونه و غیرهم‌شانس معمولاً خیلی آسون هستن و تنها نکته‌ای که باید بدونیم اینه که مجموع احتمال‌های رخ دادن هریک از اعضای فضای نمونه برابر ۱ هستش.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}, a_k\} \Rightarrow \sum_{i=1}^k P(\{a_i\}) = 1$$

مثال

$$S = \{a, b, c, d\} \Rightarrow P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1$$

راستی، لازمه یادآوری کنم که احتمال رخ دادن هر پیشامد، با مجموع احتمال‌های رخ دادن هر کدام از اعضای هر افزایش دلخواه از اون پیشامد برابر هستش:

$$P(\{a, b, c, d\}) = P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = P(\{a\}) + P(\{b, c, d\}) = \dots$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- احتمال آن که از بین ۵ نفر حاضر در یک اتاق، هلیا و مسیح ماه تولد یکسان داشته باشند و فصل تولد ۳ نفر دیگر با یکدیگر و با هلیا و مسیح نیز متفاوت باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{64}$ (۲) $\frac{1}{128}$ (۳) $\frac{1}{144}$ (۴) $\frac{1}{72}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

احتمال آن که ماه تولد هلیا و مسیح یکی باشد، برابر با $\frac{1}{12}$ است. از طرفی، ۳ نفر دیگر باید در فصل‌های متفاوت دیگر به دنیا آمده باشند، به روش زیر قابل محاسبه است:

$$P = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{36}$$

بنابراین:

$$\text{احتمال نهایی} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{144}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ ، یک زیرمجموعه ۳ عضوی $\{a, b, c\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر a و b از c بزرگ‌تر باشند، احتمال آن که a برابر با ۱۴ باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{13}$ (۲) $\frac{3}{28}$ (۳) $\frac{4}{28}$ (۴) $\frac{5}{28}$



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

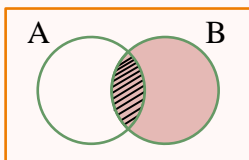
پیشامدهای A و B را به ترتیب زیر معرفی می‌کنیم:
A: a برابر با ۱۴ باشد.
B: a, b از c بزرگ‌تر باشند.
پس مطلوب ما، $P(A|B)$ است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{28}$$

فضای نمونه کاهش یافته

- در سؤالات احتمال شرطی، عموماً از یک اتفاق یا یک موضوع، به ما آگاهی داده می‌شود و از ما خواسته می‌شود تا با توجه به اون شرط یا داده، احتمال یک پیشامد رو حساب کنیم.
- معمولاً وقتی یک داده اضافه بهمون داده می‌شود، برخی از اعضای فضای نمونه حذف می‌شوند، چون امکان نداره که رخ بدن. پس در سؤالات احتمال شرطی، با فضای نمونه کاهش یافته مواجه هستیم.
- در واقع وقتی به ما آگاهی داده می‌شود که پیشامد B رخ داده، B' غیرممکن هست و از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



پس باید احتمال رخ دادن $A \cap B$ در B رو بررسی کنیم که به صورت فرمول بالا در میاد.

مثال

عدد a عضو مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 300\}$ است، اگر بدانیم a زوج است با چه احتمالی مضرب ۷ است؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

↑
a مضرب ۱۴ است
↓
a زوج است
↓
a مضرب ۷ است

$$a \in A_{\text{زوج}} = \{2, 4, 6, \dots, 300\}, n(A_{\text{زوج}}) = 150$$

۲۱ عدد مضرب ۱۴ وجود دارد. $1 \leq k \leq 21 \Rightarrow 1 \leq 7k \leq 150 \Rightarrow 2 \leq 14k \leq 300$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{21}{150} = \frac{7}{50}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- کیسه A شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، کیسه B شامل ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه و کیسه C شامل ۱ مهره سیاه است. از کیسه A، ۲ مهره و از کیسه B، ۱ مهره به تصادف انتخاب کرده و در کیسه C می‌ریزیم. حال از کیسه C مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این مهره سفید باشد، چقدر است؟

$$\frac{3}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$\frac{7}{12} \quad (2)$$

$$\frac{4}{12} \quad (1)$$

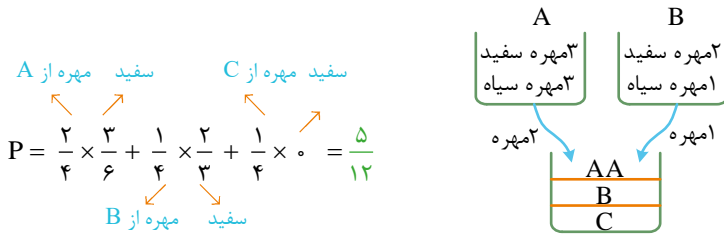
(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

اگر به محتویات کیسه C توجه کنیم، خواهیم دید ۲ مهره از کیسه A آمده و ۱ مهره از کیسه B. ۱ مهره هم که از قبل توی C بود، پس با ترکیبی که در شکل کیسه C مشخص کرده‌ایم، مواجه هستیم. حال اگر از کیسه C مهره‌ای برداریم، یا از مهره‌های کیسه A بوده یا B و یا مهره قبلی خود C بوده است.



پس با احتمال کل طرف هستیم:



گروه آموزشی ماز

۲۲- خانواده‌ای ۱ فرزند دارد. این خانواده یک فرزند دختر را هم به فرزند خواندگی می‌گیرد. اگر چند سال بعد یکی از دو فرزند این خانواده، قهرمان شای دختران شود، احتمال اینکه این دختر، همان کسی باشد که خانواده به سرپرستی گرفته‌اند، چقدر است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

با احتمال بیز طرف هستیم. پیشامدهای A و B را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

B: فرزندی که از این خانواده مشاهده کرده‌ایم، دختر است.

A: احتمال آن که شخص مشاهده شده همان دختری باشد که به سرپرستی گرفته شده است.

بنابراین مطلوب ما $P(A|B)$ است:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

احتمال بیز

قانون بیز، متشکل از یک کسر است که صورت آن یک قانون ضرب احتمال و مخرج آن یک احتمال کل است.

با به مثال این نوع احتمال رو مرور می‌کنیم:

مثال

در یک جامعه که ۱ درصد مردم کرونا دارند، شخصی به آزمایشگاه مراجعه می‌کند. آزمایش به گونه‌ای است که فرد مبتلا به احتمال ۹۹٪ و فرد سالم نیز به احتمال ۵٪ مبتلا شناخته می‌شود. اگر نتیجه آزمایش او مثبت باشد، با چه احتمالی او واقعاً مبتلا بوده است؟

شخص مبتلا باشد و آزمایش مثبت شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (I)$$

$$(I): P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

با چه احتمالی نتیجه آزمایش شخص مبتلا مثبت است؟

حل سؤال:

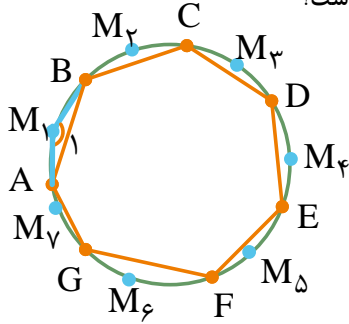
$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{99}{100}}{\left(\frac{1}{100} \times \frac{99}{100}\right) + \left(\frac{99}{100} \times \frac{5}{100}\right)} = \frac{1}{6} \approx 16.67\%$$

گروه آموزشی ماز



۲۳- هفت ضلعی زیر یک هفت ضلعی محاط در یک دایره است. نقطه‌ای روی کمان نظیر هر ضلع، مثلاً M_1 روی کمان AB انتخاب می‌کنیم. زاویه

$\widehat{AM_1B}$ را \hat{A} می‌نامیم. به همین ترتیب زاویه‌های دیگر را \hat{B} تا \hat{G} می‌نامیم. مجموع زوایای \hat{A} تا \hat{G} چقدر است؟



- (۱) 1080°
- (۲) 360°
- (۳) 540°
- (۴) 720°

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

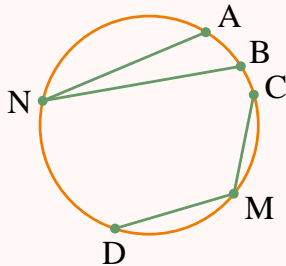
$$\hat{A} = \frac{360^\circ - \widehat{AB}}{2}, \hat{B} = \frac{360^\circ - \widehat{BC}}{2}, \dots$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \dots + \hat{G} = 7 \times 180^\circ - \left(\frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \dots + \widehat{GA}}{2} \right) = 7 \times 180^\circ - 180^\circ = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ$$

بنابراین:

نصف کمان مقابل

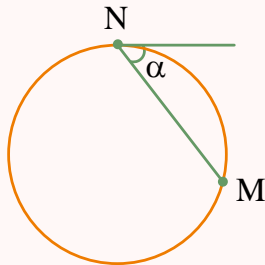
در شکل مقابل، زوایای M و N محاطی بوده و برابر نصف کمان مقابل هستند.



$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{M} = \frac{\widehat{DNC}}{2}$$

✓ بد نیست یادآوری کنیم که زاویه ظلّی (زاویه‌ای در دایره که یکی از ضلع‌های آن نیم‌خطی مماس بر دایره است.) نیز نصف کمان مقابل است:

$$\hat{N} = \frac{\widehat{NM}}{2}$$



گروه آموزشی ماز

۲۴- در یک دوزنقه محیطی و محاطی ارتفاع وارد بر قاعده و ساق اندازه‌هایی به ترتیب برابر با ۲ و ۵ دارند. مساحت دوزنقه چقدر است؟

(۴) ۲۵

(۳) ۲۰

(۲) ۱۰

(۱) ۷

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر a و b قاعده‌ها و c ساق یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی باشند و ارتفاع وارد بر قاعده h باشد، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{2} = c$$

$$S = \frac{1}{2}h(a+b) = h \times \frac{a+b}{2} = hc$$

$$S = 2 \times 5 = 10$$

بنابراین:

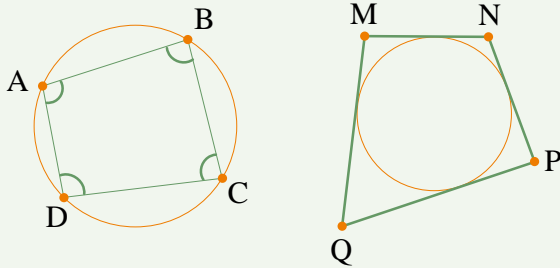
محیطی یا محاطی؟ جفتشون!

- چندضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه اضلاع آن مماس باشد.
- چندضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همه رئوس آن عبور کند.



مثال

ABCD یک چهارضلعی محاطی و MNPQ یک چهارضلعی محیطی است.
✓ در چندضلعی محاطی ABCD داریم:



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

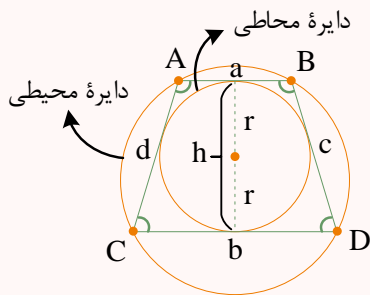
به عبارتی، در یک چهارضلعی محاطی، مجموع زوایای مقابل 180° است.
✓ در چندضلعی محیطی MNPQ داریم:

$$MN + QP = MQ + MP$$

به عبارتی، در یک چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل باهم برابر است.

یک تست کنکور!

مبثی که تقریباً هر سال در کنکور از سؤال میاد، چندضلعی‌های محیطی و محاطی و علی‌الخصوص **دوزنقه محاطی و محیطی** هستند. نکاتش رو مرور می‌کنیم:



$$a + b = c + d \xrightarrow{d=c} c = \frac{a+b}{2} \quad \checkmark$$

$$\hat{A} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{D}, \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \quad \checkmark$$

$$h^2 = ab \quad \checkmark$$

$$S_{\text{مساحت}} = h \cdot \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2} \quad \checkmark$$

$$S_{\text{مساحت}} = \sqrt{abcd} \quad \checkmark$$

$$S_{\text{مساحت}} = 2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{R}{2} \quad \checkmark$$

شعاع دایره محیطی شعاع دایره محاطی

$$S_{\text{مساحت}} = \frac{r}{2} \cdot \frac{p}{2} \quad \checkmark$$

نصف محیط شعاع دایره محاطی

گروه آموزشی ماز

۲۵- در یک ضلعی منتظم، اندازه کوچک‌ترین قطر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است. اندازه بزرگ‌ترین قطر چقدر است؟

۲ (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۳)

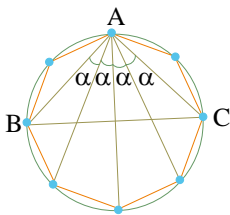
$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:



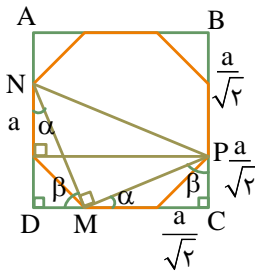
زاویه بین دو قطر متوالی زاویه محاطی روبه‌روی یک ضلع از ۸ ضلعی منتظم است، یعنی زوایای محاطی روبه‌روی کمان‌های مساوی هستند، پس برابرند.

به عبارتی هر کدام از زاویه‌های داخلی برابر با $\frac{180^\circ}{8}$ است، حال زاویه‌ای شامل ۴ تا از این زاویه‌ها برابر با 90° است.

$$4 \times \frac{180^\circ}{8} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow BC = AB \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$



روش دوم: اصولاً همه سوال‌های مربوط به ۸ ضلعی منتظم را با مربع محیط بر آن حل کنید. دو مثلث MPC و NMD همنهشت هستند، بنابراین:



$$\hat{M} = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$NP = MN \times \sqrt{2}$$

بنابراین مثلث MNP قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، بنابراین:

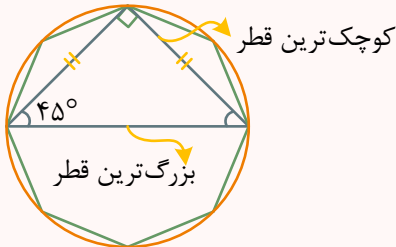
روش سوم: مربع را رسم کنید و قطرهای را محاسبه کنید. مثلاً در همین مربع:

$$MP = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

اندازه قطر کوچک

$$MP \times \sqrt{2} = \text{اندازه قطر بزرگ}$$

هشت ضلعی منتظم



نسبت بزرگ‌ترین قطر به کوچک‌ترین قطر در ۸ ضلعی منتظم برابر با $\sqrt{2}$ است.

$$\frac{\text{بزرگ‌ترین قطر}}{\text{کوچک‌ترین قطر}} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

اگر ضلع هشت ضلعی منتظم را a بنامیم، طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\text{کوچک‌ترین قطر} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} a$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی محاطی است. اضلاع AB و CD را از سمت نقاط C و B امتداد دهیم تا در نقطه‌ای مانند M یکدیگر را قطع کنند. اگر $MC=1$ و $CD=11$ و $AB=1$ ، آن‌گاه اندازه MB چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

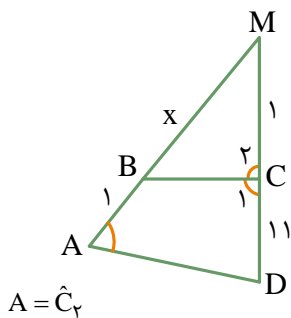
۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۳

چهارضلعی محاطی است، بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{C}_1 = 180^\circ$$



از طرفی: $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ ، بنابراین:

از طرفی، زاویه \hat{M} بین دو مثلث MBC و MAB مشترک است، بنابراین:

$$\triangle MBC \sim \triangle MAB \Rightarrow \frac{x}{1+11} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

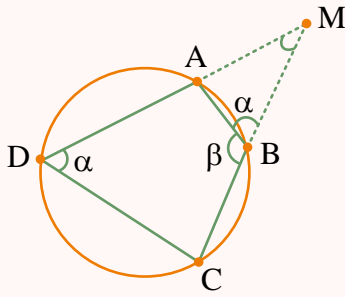


یک تیپ مشهور در تشابه



گاهی اوقات برای یافتن تشابه ۲ مثلث، از چهارضلعی محاطی استفاده می‌شود:

می‌دانیم که در چهارضلعی محاطی ABCD، رابطه $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ برقرار است. داریم:



$$\begin{cases} \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = \hat{B}M$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{م} (\text{زاویه مشترک}) \\ \hat{M}D = \hat{M}B \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} M\hat{B}A \sim M\hat{D}C$$

$$\text{تشابه دو مثلث} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{BA}{DC}$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- ترکیب کدام تبدیل‌ها جهت یک شکل را حفظ نمی‌کند؟

- (۱) ترکیب دو انتقال
- (۲) ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط موازی یا متقاطع
- (۳) ترکیب دو تجانس متوالی
- (۴) ترکیب یک انتقال و یک بازتاب

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

انتقال جهت شکل را حفظ می‌کند، اما بازتاب قبل با بعدش کار را خراب می‌کند. چون بازتاب تنها تبدیلی است که جهت شکل را عوض می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۲۸- دو میانه AM و BN از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع واحد، یکدیگر را در نقطه G قطع می‌کنند. نقطه P روی ضلع BC واقع است. کمترین مقدار GP + PN چقدر است؟

$\frac{\sqrt{21}}{6}$ (۴)

$\frac{\sqrt{21}}{9}$ (۳)

$\frac{\sqrt{21}}{8}$ (۲)

$\frac{\sqrt{21}}{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

از قاعده هرون استفاده می‌کنیم. G را نسبت به BC بازتاب می‌دهیم تا نقطه G' به دست آید. G'N، BC را در نقطه مطلوب P قطع می‌کند.

$$\frac{CH}{MC} = \frac{HN}{AM} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$$

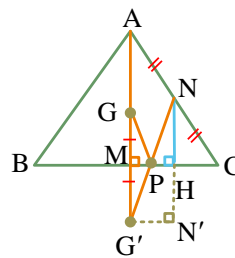
$$GM = MG' = \frac{1}{3} AM$$

$$MH = CM - CH = \frac{1}{2} BC - \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} a$$

$$G'N' = \frac{1}{4} a$$

$$NN' = NH + HN' = \frac{1}{2} AM + \frac{1}{3} AM = \frac{5}{6} AM = \frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$NG'^2 = NN'^2 + G'N'^2 = \left(\frac{75}{144} + \frac{1}{16}\right) a^2 = \frac{84}{144} a^2 \Rightarrow NG' = \frac{\sqrt{21}}{6} a \xrightarrow{a=1} NG' = \frac{\sqrt{21}}{6}$$



طبق قضیه تالس:

از طرفی:

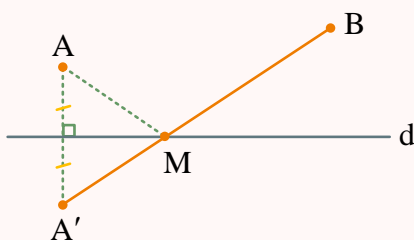
بنابراین:

از طرفی:

پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر



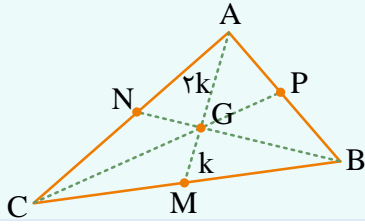
(۱) طول کوتاه‌ترین مسیر بین A و B (در یک طرف خط d) به طوری که از نقطه‌ای مانند M روی خط d بگذرد، برابر است با: A'B





نکته

مرکز ثقل مثلث ABC، هر میانه مانند AM را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند به طوری که: $AG = 2GM$



گروه آموزشی ماز

۲۹- تصویر نقطه $A(1, 2)$ تحت تبدیل بازتاب نسبت به خط $x=5$ را A' و تصویر A' تحت تبدیل بازتاب نسبت به خط $x=-2$ را A'' می‌نامیم. اندازه AA'' چقدر است؟

۳ / ۵ (۴)

۳ (۳)

۱۴ (۲)

۷ (۱)

سخت - مفهومی / محاسباتی - (۱۱۰۲)

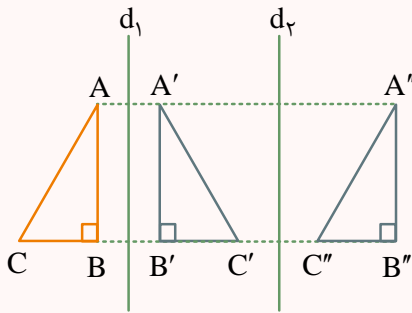
پاسخ: گزینه ۲

حاصل دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط موازی یک انتقال است که بردار آن عمود بر دو محور و اندازه آن، دو برابر فاصله دو خط موازی است.
 $AA'' = 2 \times (5 - (-2)) = 2 \times 7 = 14$

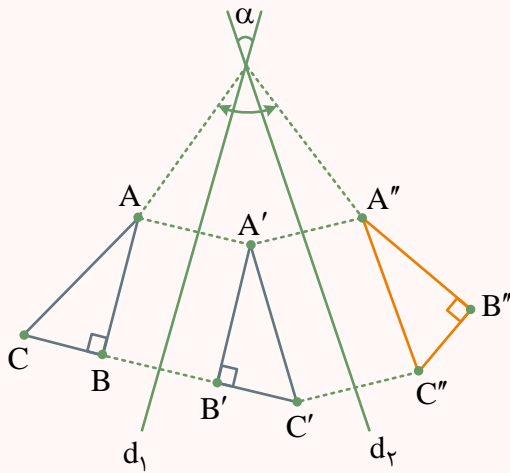
ترکیب تبدیل‌های هندسی

ترکیب چند تبدیل

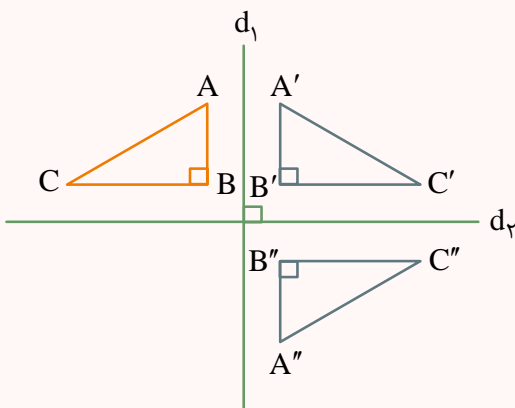
(۱) ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است. اندازه بردار انتقال دو برابر فاصله بین محورهای دو بازتاب می‌باشد و بردار انتقال بر محورهای دو بازتاب عمود است.



(۲) ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط متقاطع یک دوران است. مرکز دوران محل تلاقی دو خط و زاویه دوران دو برابر زاویه بین دو خط است.

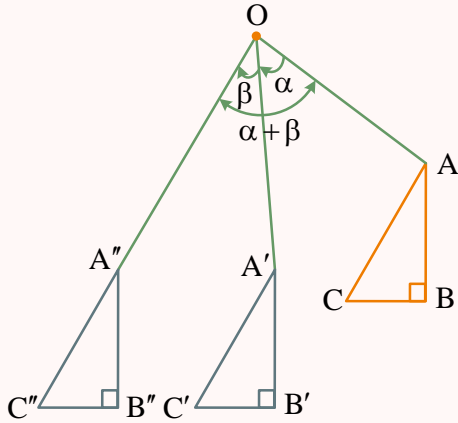


(۳) ترکیب دو بازتاب با محورهای عمود بر هم یک دوران 180° یا یک تجانس معکوس با ضریب $k = -1$ است.





(۴) ترکیب دو دوران با یک مرکز، یک دوران است با همان مرکز که زاویه آن برابر است با مجموع زوایای دو دوران اولیه.



(۵) ترکیب یک انتقال و یک دوران، دوران است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- کیسه A شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. کیسه B نیز شامل ۴ مهره سفید و ۱ مهره سیاه است. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده، مهره‌ای تصادفی از آن بر می‌داریم، این مهره سفید است. از همین کیسه مهره دیگری بر می‌داریم، احتمال آن که سفید باشد، چقدر است؟

$$\frac{5}{13} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{13} \quad (۳)$$

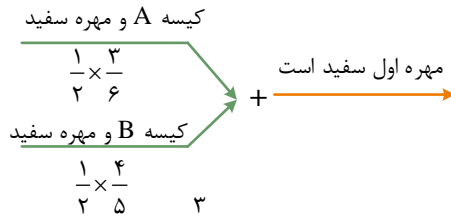
$$\frac{4}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{23}{40} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

احتمال آن که مهره دوم سفید باشد به آن بستگی دارد که مهره از کدام کیسه باشد، همینجا دیگر احتمال هر کیسه برابر با $\frac{1}{2}$ نیست، مثل ابتدای مسأله، زیرا الان یک مشاهده انجام شده، مهره اول سفید است. در این بخش با یک احتمال بیز طرف هستیم، یعنی حالا که مهره سفید است، احتمال آن که مثلاً کیسه A انتخاب شده باشد، چقدر است؟



$$P(A \text{ مهره سفید} | \text{کیسه A}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}} = \frac{1}{1 + \frac{8}{5}} = \frac{5}{13}$$

احتمال آن که دومی نیز سفید باشد، از یک احتمال کل محاسبه می‌شود.

$$P(\text{مهره دوم سفید باشد}) = \frac{5}{13} \times \frac{2}{5} + \frac{8}{13} \times \frac{3}{4} = \frac{2+6}{13} = \frac{8}{13}$$

گروه آموزشی ماز